

# 基于 Monte Carlo 采样的压缩感知弱匹配去噪重构

田文彪, 芮国胜, 康 健, 张 洋

(海军航空工程学院信号与信息处理山东省重点实验室, 山东烟台 264001)

**摘 要:** 最小二乘是现有贪婪迭代类压缩感知重构算法中通用的信号估计方法, 其未考虑到可能将量测噪声引入信号估计的情况. 针对以上不足, 提出一种基于 Monte Carlo 采样的压缩感知弱匹配去噪重构算法. 该算法在未知信号稀疏度先验的条件下, 通过引入递推 Bayesian 估计减小量测噪声的干扰; 同时, 以弱匹配的方式筛选出有效的原子, 并剔除冗余原子进而重构原信号. 新算法继承了现有贪婪迭代类算法的有效性, 同时避免了因噪声干扰或稀疏度未知导致的重构失败. 理论分析和实验表明, 新算法在同等条件, 尤其是非高斯噪声情况下, 重构性能优于现有典型贪婪迭代类算法, 且其运算时间低于 BPDN 算法和同类的 KF-SAMP 算法.

**关键词:** 压缩感知; 去噪; 自适应重构; Monte Carlo 采样

**中图分类号:** TN911.73

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2015)09-1732-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.09.008

## Monte Carlo Matching Pursuit Denoising Inversion for Compressed Sensing

TIAN Wen-biao, RUI Guo-sheng, KANG Jian, ZHANG Yang

(Signal and Information Processing Provincial Key Laboratory in Shandong, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, Shandong 264001, China)

**Abstract:** The method of least squares, which introduces the measuring noise into the state estimates, is wildly used in the greedy iterative compressed sensing inversion algorithms. Aimed at this problem, a Monte Carlo matching pursuit denoising inversion algorithm for compressed sensing is proposed. The proposed algorithm does not need the sparse prior while it eliminates the interference of measuring noise by recursive Bayesian estimation. Meanwhile, weakly matching pursuit is used to sift the effective support set and pick out the redundancy to inverse the original states. The new algorithm is able to avoid inversion failure due to noise interference or unknown sparsity as well when it retains the effectivity of other greedy algorithms. The theoretical analyses and experiment simulations prove that the performance of the proposed algorithm is better than that of the existing greedy iterative inversion algorithms in the same condition, especially in the non-Gaussian noise situation, and its operating time is shorter than that of BPDN and similar to that of KF-SAMP.

**Key words:** compressed sensing; de-noising; adaptive inversion; Monte Carlo method

### 1 引言

压缩感知<sup>[1~3]</sup> (Compressed Sensing, CS) 理论基于模型知识, 依据少量可测参数值, 通过最优化算法求解病态方程, 进而反推信号参数. 在信号处理领域, 其指出可远低于 Nyquist 频率对信号进行随机观测, 革命性地将数据采集与压缩同时进行, 实现从信号采样到信息采样的转变. 这样“少采样, 巧计算”的 CS 技术重点都落在了如何从仅有的少量观测数据中最大程度地重构原信号上.

现有压缩感知重构算法均可归为三大类: (1) 凸松

弛法; (2) 贪婪追踪算法; (3) 组合算法. 凸优化算法复杂度普遍较大, 而匹配追踪类贪婪算法因其实现简单受到了广泛的重视. 现有贪婪算法中均采用最小二乘来求取每次迭代的信号估计, 尽管该方法在未知任何信号先验的情况下能够取得良好的效果. 然而, 该方法未考虑实际环境下存在的噪声对信号估计的影响; 再者, 部分回溯贪婪算法如子空间追踪<sup>[4]</sup> (Subspace Pursuit, SP), 压缩采样匹配追踪<sup>[5]</sup> (Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP) 等假设信号稀疏度已知, 而实际情况下, 信号稀疏度可能时变且难以确知.

Namrata Vaswani<sup>[6]</sup>首次将 Kalman 滤波应用于压缩

感知,着重研究稀疏模式变化缓慢的稀疏信号序列,且将其支撑集的变化规律作为先验,并据此建立信号方程,提出了 KFCS (Kalman filtered Compressive Sensing) 算法.该算法性能较好但是复杂度较高.田文飏<sup>[7]</sup>等另辟蹊径,将 Kalman 滤波与贪婪算法结合,以信号最小二乘估计作为 Kalman 滤波初值,在最小均方误差准则下,每次迭代都获得最佳信号估计,据此提出 KF-SAMP (Sparsity Adaptive Matching Pursuit with Kalman filtering).该算法受限于 Kalman 解决线性高斯问题的前提假设,当量测过程受非高斯噪声干扰时重构将失效.与扩展 Kalman 滤波 (Extended Kalman Filter, EKF) 和不敏 Kalman 滤波 (Unscented Kalman Filter, UKF) 相比,粒子滤波 (Particle Filtered, PF) 更适用于非线性非高斯重构问题.

立足于贪婪迭代,本文提出了 Monte Carlo 匹配追踪 (Monte Carlo Matching Pursuit, MCMP) 算法,利用递推 Bayesian 过程得到信号在每次迭代下的去噪估计,通过弱匹配约束信号的稀疏度,从而在稀疏度未知且有噪声污染的条件下重构原信号.仿真结果表明:在相同实验条件下,与传统贪婪算法相比该算法抗噪声能力更强,重构信噪比更大.尽管算法复杂度比 OMP 等算法复杂度有所增加,但其运算时间仍低于 BPDN 等典型凸优化算法和与之同类的 KF-SAMP 算法.

## 2 Monte Carlo 匹配追踪算法

### 2.1 问题描述

CS 高效地将数据压缩和观测过程融合在了一起,换个角度来看,CS 也为从少量观测数据估计复杂信号提供了一种新的思路.求解 CS 问题本质上是一个病态重构问题.

研究对象为  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ , 它可以是待遥感的地面实况应用参数、可以是连续的电信号也可以是图像、音频等数据,其物理本质是一个长度为  $N$  且  $K$  项稀疏<sup>[3]</sup>的矢量.若用一个非自适应感知矩阵  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$  对  $\mathbf{x}$  进行观测,可得到观测值向量  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ , 含噪观测模型可表示为:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1)$$

其中  $M \ll N$ ,  $\mathbf{e}$  为噪声矢量.

下面以贪婪算法中典型的 SP 为例说明噪声引入信号估计的问题.由于每次迭代中算法均在最小误差平方和 (即  $\|\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$  最小) 准则下,以最小二乘法得到信号估计  $\hat{\mathbf{x}}$ , 且以稀疏度真实值  $K$  作为约束,因此算法实际求解的问题是:

$$\min \|\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 = K \quad (2)$$

其中,  $\|\cdot\|_0$  表示矢量  $\ell_0$  范数即信号支撑集的势.其它贪婪算法稀疏度约束条件各有不同,但目标函数与此一致.随着迭代的进行,误差平方和最终趋于 0,即  $\Phi \hat{\mathbf{x}}$

趋于  $\mathbf{y}$ , 对照式(1)可知,此时噪声  $\mathbf{e}$  完全被引入到信号估计  $\hat{\mathbf{x}}$  中,原信号不可能被精确重构.因此,为减小噪声的干扰,目标函数应选为信号估计均方误差最小,等效为  $\min \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2$ . 由田文飏等的前期工作<sup>[7]</sup>可知,在噪声分布已知为高斯分布的条件下,引入 Kalman 滤波能够获得较好的重构性能.但是,实际条件下,量测噪声  $\mathbf{e}$  常表现出非高斯特征,如通信系统中常见的 Rayleigh 噪声、雷达目标跟踪过程中遇到的 Glint 噪声等.此时基于线性高斯假设的 Kalman 滤波方法在估计信号时误差较大且可能发散.于是,考虑引入基于 Monte Carlo 采样和递推 Bayesian 估计的统计滤波方法.该方法适用于能用信号空间模型表示的非高斯背景的非线性随机系统,精度可以逼近最优估计<sup>[8-10]</sup>.

### 2.2 递推方程组

首先量测方程已由式(1)给出.

将  $\mathbf{x}$  看做是一个静止点的信号矢量,其信号不随时间转移,即

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n-1) \quad (3)$$

则式(3)给出了状态方程,  $x_{0:n} = \{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^n$  表示 0 到  $n$  时刻的信号集.已知信号  $\mathbf{x}$  的先验条件概率为  $p(\mathbf{x}_0)$ ,  $n$  时刻信号  $\mathbf{x}_n$  的后验概率为  $p(\mathbf{x}_{0:n} | y_{1:n})$ . 利用  $\{\mathbf{x}_{0:n}^i\}_{i=1}^{N_i}$  描述从重要密度函数  $q(\mathbf{x}_{0:n} | y_{1:n})$  采样产生的粒子集,  $\{w_n^i\}_{i=1}^{N_i}$  表示对应权值.  $n$  时刻信号后验概率分布可离散加权为

$$p(\mathbf{x}_{0:n} | y_{1:n}) \approx \sum_{i=1}^{N_i} \overline{w}_n^i \delta(\mathbf{x}_{0:n} - \mathbf{x}_{0:n}^i), \quad \overline{w}_n^i = w_n^i / \sum_{j=1}^{N_i} w_n^j \quad (4)$$

式中

$$w_n^i \propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:n}^i | y_{1:n})}{q(\mathbf{x}_{0:n}^i | y_{1:n})}$$

称为重要性权值.

为了实现递推运算将重要密度分解为  $q(\mathbf{x}_{0:n} | y_{1:n}) = q(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{0:n-1}, y_{1:n}) q(\mathbf{x}_{0:n-1} | y_{1:n-1})$ , 并由  $q(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{0:n-1}, y_{1:n})$  得到粒子  $\{\mathbf{x}_n^i\}_{i=1}^{N_i}$ , 重要性权值更新为

$$w_n^i = w_{n-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n^i) p(\mathbf{x}_n^i | \mathbf{x}_{n-1}^i)}{q(\mathbf{x}_n^i | \mathbf{x}_{n-1}^i, \mathbf{y}_n)} \quad (5)$$

即贯序重要性采样 (SIS). 重要密度函数取先验概率密度, 即

$$q(\mathbf{x}_n^i | \mathbf{x}_{n-1}^i, \mathbf{y}_n) = p(\mathbf{x}_n^i | \mathbf{x}_{n-1}^i) \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 可将重要性权值化简为

$$w_n^i = w_{n-1}^i p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n^i) \quad (7)$$

为避免退化现象发生, 需引入重采样技术. 其思路为: 首先计算粒子的概率累加  $(a_j)_{j=1}^N$ , 并假设  $a_0 = 0$ , 随

机采样第  $i$  ( $i=1, 2, \dots, N_s$ ) 个服从  $[0, 1]$  均匀分布的随机数  $\xi_i$ , 若  $a_{j-1} < \xi_i < a_j$ , 则取第  $i$  次随机采样结果为  $\mathbf{x}_{0,n}^i$ , 这样就达到了复制大权值粒子的效果.

### 2.3 弱匹配

已有成果<sup>[11]</sup>表明, 在稀疏度不确知的条件下, 将弱匹配应用于贪婪算法中的原子扩充和剔除过程能够起到增强重构性能的效果. 具体来说, 弱匹配就是在原子扩充时通过弱匹配参数  $\mu_1 \in (0, 1]$  调节扩充的规模, 设第  $l$  次迭代时, 重构信号支撑集为  $\Gamma^l$ ,  $\mathbf{v} = \Phi^T \mathbf{r}^l$ ,  $\mathbf{v}$  中第  $i$  个元素  $v_i$  是原子向量  $\varphi_i$  与残差  $\mathbf{r}^l$  的内积, 即  $\langle \varphi_i, \mathbf{r}^l \rangle$ , 则第  $l+1$  次迭代时支撑集更新可表示为

$$\Gamma^{l+1} = \Gamma^l \cup \{i \mid |v_i| \geq \mu_1 \cdot \max_{j \in [1, N]} |v_j|\} \quad (8)$$

该扩充过程可以看作选取相关系数大于一定阈值的原子, 该阈值与相关系数最大值有关.  $\mu_1 = 1$  时, 与 OMP 一致, 每次迭代只选取与残差最匹配的单个原子, 估计支撑集中每次增加一个元素. 当  $\mu_1$  较小时, 每次迭代则选取多个原子.

在原子剔除时, 弱匹配也采取类似的策略, 以弱匹配参数  $\mu_2 \in (0, 1]$  调节剔除的规模. 每次仅保留信号估计  $\hat{\mathbf{x}}$  中大于  $\mu_2 \cdot \|\hat{\mathbf{x}}\|_\infty$  的元素. 根据论文假设  $M \geq 2K$ , 因此, 如经过弱匹配剔除后, 剩余原子数大于  $M/2$  则仅保留值最大的前  $M/2$  个.

Honglin Huang 等人<sup>[11]</sup>通过实验验证, 参数  $\mu_1, \mu_2$  取值  $0.4 \sim 0.8$  之间可以兼顾算法性能和运算速度.

### 2.4 MCMP 算法步骤

具体步骤如算法 1 描述. 不妨假设信号状态先验分布  $p(\mathbf{x}_0)$  满足高斯分布, 且其均值为信号的最小二乘估计  $\Phi^T \mathbf{y} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}$ , 方差为  $\sigma$ , 取值可依据噪声水平设置. 由迭代停止条件 ( $\|\mathbf{r}^l\|_2 > \|\mathbf{r}^{l-1}\|_2$ ) 可知, 迭代过程中  $\mathbf{r}^l$  能量单调递减, 算法至少收敛到一个局部最小点.

#### 算法 1 Monte Carlo 匹配追踪 (MCMP) 算法

输入: 观测值向量  $\mathbf{y}_{M \times 1}$ , 感知矩阵  $\Phi_{M \times N}$

输出: 重构信号  $\hat{\mathbf{x}}_{N \times 1}$

步骤 1 (初始化)  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$ ,  $l = 0$ ,  $\Gamma^0 = \emptyset$ ;

步骤 2 (计算相关系数)  $\mathbf{v} = \Phi^T \mathbf{r}^l$ ,  $l = l + 1$ ;

步骤 3 (原子扩充)  $\Omega = \{i \mid |v_i| \geq \mu_1 \cdot \|\mathbf{v}\|_\infty\}$ ,  $\Gamma^l = \Omega \cup \Gamma^{l-1}$ ;

步骤 4 (递推 Bayesian 估计)

(1) 由先验概率  $p(\mathbf{x}_0)$  产生粒子集  $\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^N$ , 初始权值均为  $1/N_s$ ;

(2) 利用状态方程(3)更新粒子, 重要性权值如式(5)计算, 并归一化得到  $\overline{w}_n^i$ ;

(3) 重采样, 由粒子集  $\{\mathbf{x}_{0,n}^i\}_{i=1}^N$  根据  $\overline{w}_n^i$  重采样得到新的  $N_s$  个粒子;

$$(4) \text{信号估计 } \hat{\mathbf{x}}_n = \sum_{i=1}^{N_s} w_n^i \mathbf{x}_n^i;$$

$$\text{方差估计 } \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^{N_s} w_n^i (\mathbf{x}_n^i - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n^i - \hat{\mathbf{x}}_n)^T$$

(5) 判断是否结束, 是则令  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_n$ , 进入步骤 5, 否则  $n = n + 1$ , 重复执行(2)~(4);

步骤 5 (原子剔除)  $\Gamma^l = \{i \mid |\hat{\mathbf{x}}_i| \geq \mu_2 \cdot \|\hat{\mathbf{x}}\|_\infty\} \cap \{\hat{\mathbf{x}} \text{ 前 } M/2 \text{ 个最大系数的索引}\}$ ;

步骤 6 (更新) 残差  $\mathbf{r}^l = \mathbf{y} - \Phi_\Gamma \hat{\mathbf{x}}_\Gamma^l$ , 若  $\|\mathbf{r}^l\|_2 > \|\mathbf{r}^{l-1}\|_2$ , 令  $\Gamma^l = \Gamma^{l-1}$ , 输出  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_\Gamma^{l-1}$ , 否则返回步骤 2 进行下一步迭代.

## 3 算法误差及复杂度分析

### 3.1 误差分析

MCMP 算法以信号最小二乘估计为均值布撒粒子, 利用 2.2 节描述的 Monte Carlo 采样及递推过程, 在每次迭代时对信号进行逼近最优的估计. 算法的递推 Bayesian 估计(即算法 1 步骤 4)可选择方差估计作为迭代控制条件, 理论上的方差下界可通过后验克拉美劳下界(Posterior Cramér-Rao Bound, PCRB)获得.

定义  $\mathbf{J}_n$  为  $n$  时刻 Fisher 信息矩阵, 则信号估计  $\hat{\mathbf{x}}_n$  的均方误差以  $\mathbf{J}_n^{-1}$  为下界, 即

$$\mathbf{E}[(\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x})^T] \geq \mathbf{J}^{-1} \quad (9)$$

根据文献[12]结论可得到其递推形式为

$$\mathbf{J}_{n+1} = \mathbf{D}_n^{22} - \mathbf{D}_n^{21}(\mathbf{J}_n + \mathbf{D}_n^{11})^{-1} \mathbf{D}_n^{12} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{D}_n^{11} = \mathbf{E}[-\Delta_{\mathbf{x}_n}^x \ln p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_n)] \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_n^{12} = \mathbf{E}[-\Delta_{\mathbf{x}_n}^x \ln p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_n)] \quad (12)$$

$$\mathbf{D}_n^{21} = (\mathbf{D}_n^{12})^T \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_n^{22} = \mathbf{E}\{-\Delta_{\mathbf{x}_{n+1}}^x [\ln p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_n) + \ln p(\mathbf{y}_{n+1} | \mathbf{x}_{n+1})]\} \quad (14)$$

$\ln(\cdot)$  表示自然对数,  $\mathbf{E}[\cdot]$  表示期望,  $\Delta$  表示二阶微分算子, 即

$$\Delta_{\mathbf{x}}^x = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T}$$

结合系统状态方程式(3)可知, 状态由  $\mathbf{x}_n$  转移至  $\mathbf{x}_{n+1}$  是必然的、确知的, 因此式(11)~式(14)可做相应的简化, 即

$$\mathbf{D}_n^{21} = \mathbf{D}_n^{11} = \mathbf{D}_n^{12} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D}_n^{22} = \mathbf{E}\{-\Delta_{\mathbf{x}_{n+1}}^x \ln p(\mathbf{y}_{n+1} | \mathbf{x}_{n+1})\}$$

又因为信号  $\mathbf{x}$  与噪声  $\mathbf{e}$  相互独立, 则  $p(\mathbf{y}_{n+1} | \mathbf{x}_{n+1}) = p[(\mathbf{y}_{n+1} - \Phi \mathbf{x}_{n+1}) | \mathbf{x}_{n+1}] = p[\mathbf{e}_{n+1}]$ .

以常见的 Rayleigh 噪声为例进行讨论, 若  $\mathbf{e}_{n+1}$  中每个元素独立并服从参数为  $\sigma_i$ ,  $i \in [1, M]$  的 Rayleigh 分布, 则

$$p(y_{n+1} | x_{n+1}) = |e_{n+1}^T Q^{-1}| \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} e_{n+1}^T Q^{-1} e_{n+1}\right]$$

$$e_{n+1} = y_{n+1} - \Phi x_{n+1}$$

其中  $Q = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2)$ , 此时,

$$J_{n+1} = D_n^{22} = E\{-\Delta_{x_{n+1}}^x \ln p(y_{n+1} | x_{n+1})\} = \Phi Q^{-1} \Phi^T.$$

### 3.2 复杂度分析

算法复杂度集中在递推 Bayesian 估计过程: 步骤 4(2)中重要性权值计算并归一化的复杂度为  $O(N_s)$ ; 步骤 4(3)重采样复杂度为  $O(N_s^2)$ ; 步骤 4(4)信号和方差估计复杂度均为  $O(N_s N)$ . 由此可见, MCMP 算法中复杂度很大程度取决于粒子个数. 与之对照, 以简单快捷著称的 OMP 类贪婪算法复杂度大致为  $O(KMN)$ , MCMP 算法略为复杂, 因为后者以复杂度较大的递推 Bayesian 估计过程替代最小二乘, 以换取重构性能的提高. 当粒子数与  $x$  规模相当的时候, 这部分运算复杂度的提高是能够接受的, 新算法复杂度仍将低于 BPDN 算法的  $O(N^3)$  复杂度和同类的 KF-SAMP 算法的  $O(N^{2.81})$  复杂度.

## 4 数值实验及结果分析

### 4.1 抗噪声性能比较

取长度为  $N = 200$  的一维稀疏测试信号矢量  $x$ , 稀疏度  $K$  分别取 10 和 35, 观测数满足  $M = c \cdot K \ln(N/K)^{[11]}$ , 这里  $c$  取 2.4. 分别考虑在高斯噪声和非高斯噪声环境下获得观测值, 其信噪比 SNR 从 0dB 至 30dB 以步长 5dB 变化. 考察 MCMP 和典型算法如 OMP、RAMP、SAMP、BAOMP、BP 去噪算法(即 BPDN<sup>[13]</sup>)以及与其同类的 KF-SAMP 算法的抗噪性能. MCMP 中  $\mu_1, \mu_2$  分别取 0.6 和 0.4, 粒子数为 100, RAMP 算法中, 迭代停止与阶段转换

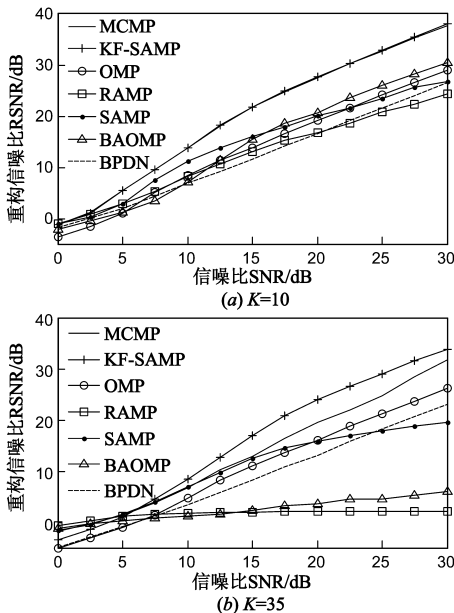


图1 高斯噪声下各算法RSNR与SNR关系

阈值  $\epsilon_1, \epsilon_2$  均取  $10^{-4}$ , 稀疏度递增步长为 10, SAMP 中步长设为 3, 噪声水平代入真值  $\|e\|_2$ , BAOMP 中两个弱匹配参数分别选取文献中给出的最佳值 0.4 和 0.6. BPDN 利用 CVX 工具箱<sup>[14]</sup>实现. KF-SAMP 参数依照文献[7]设定. 重构的重构信噪比(RSNR)定义为

$$RSNR = 20 \lg \frac{\|x\|_2}{\|x - \hat{x}\|_2}.$$

高斯噪声环境下, 仿真 2000 次统计的重构信号 RSNR 随输入观测值 SNR 变化曲线对比如图 1, 稀疏度较小时, MCMP 与 KF-SAMP 的 RSNR 性能相当, 优于其他算法在含噪条件下的重构性能; 当稀疏度较大时, 各算法的 RSNR 性能出现不同程度的下降, MCMP 的 RSNR 指标仅次于 KF-SAMP 的相应值, 但仍优于其他算法. 这契合了在高斯噪声环境下 Kalman 能够获得最优信号估计的论断.

从图 1(b)中 RSNR 性能对比来看, BAOMP 算法几乎完全失效(RSNR 在 5dB 以下), 而 MCMP 和 KF-SAMP 明显优于 BAOMP, 关键在于前两种算法分别使用了递推 Bayesian 估计和 KF 过程取代了 BAOMP 中的最小二乘估计以达到去噪目的, 进而获得了可观的 RSNR 增益.

图 2 描绘的是非高斯噪声条件下, 各算法 RSNR 随输入观测值 SNR 变化曲线. 从图中看出, 除 KF-SAMP 算法受非高斯噪声影响较大并最终失效外, 其余算法性能几乎与高斯条件下 RSNR 性能一致. 这是由 KF-SAMP 算法中对噪声环境的高斯假设不满足所致, 而其余算法对噪声类型并没有限制.

结合图 1、图 2 可知, 各算法 RSNR 随输入观测值的信噪比增大而增大, 随信号矢量稀疏度增大而减小.

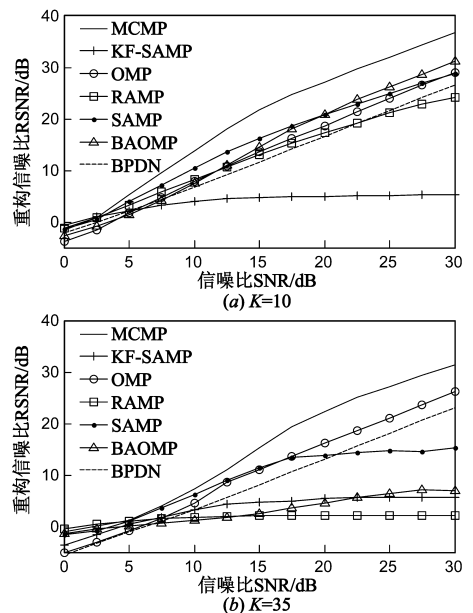


图2 非高斯噪声下各算法RSNR与SNR关系

MCMP 的 RSNR 始终高于经典的 OMP 类贪婪算法,尤其在非高斯噪声条件下,其抗噪声性能优于包括 KF-SAMP 在内的其余同类算法.且 MCMP 在自适应约束稀疏度的重构过程中也规避了部分算法迭代停止与阶段转换双阈值设置的难题.

## 4.2 不同算法运算时间的比较

考察各种算法运算时间随信号矢量稀疏度  $K$  的变化规律,如图 3 所示,SNR 均设置为 30dB.其余设置参照与 4.1 节仿真.从图中看出各算法运算时间均有随稀疏度上升而增加的趋势.在仿真各算法中,BPDN 的运算时间最长,这是由凸优化类算法复杂度本身较高引起的.OMP 类的贪婪算法运算时间较短,在  $10^{-2}$ s 量级,这类算法就是以简单、易于实现而著称.本文提出的 MCMP 算法运算时间比贪婪迭代类算法运算时间稍长,比 BPDN 算法运算时间短,与 KF-SAMP 算法运算时间相当.前面已经说明,MCMP 利用复杂度较大的递推 Bayesian 估计过程来减小最小二乘可能给重构引入的干扰,且仿真结果也表明其 RSNR 性能比其余算法高.因此,可以认为 MCMP 算法在可接受范围内增加复杂度来提升了对含噪信号的重构能力.从另一角度来看,MCMP 算法维持了同类的 KF-SAMP 算法复杂度,且在处理非高斯重构问题上性能较之有所提高.

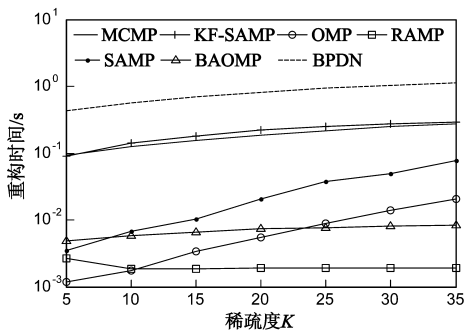


图3 不同算法运算时间比较

## 5 结论

在压缩感知理论框架下,针对目前现有重构速度快、实现容易的贪婪迭代算法抗噪声性能不足的缺陷,提出了一种基于 Monte Carlo 采样的压缩感知弱匹配去噪重构算法,首先依据压缩感知动态空间模型,给出 Monte Carlo 采样及递推 Bayesian 估计的具体形式,再将其引入重构迭代,逼近最优地估计原信号,基于弱匹配筛选出有效的原子,并剔除冗余原子,进而重构原信号.仿真结果表明,MCMP 算法抗噪声性能,尤其是抗非高斯噪声的能力优于现有典型的贪婪算法,尽管其复杂度略有提高,但是仍低于 BPDN 等典型凸优化算法并和同类的 KF-SAMP 算法复杂度相当.尽管 MCMP 在解

决非高斯压缩感知重构问题上表现出了优越性,但其也存在一些问题.从 2.4 节分析来看,MCMP 算法复杂度与粒子数成正比,而粒子数与系统后验概率密度的近似程度成正比.因此,如何改进算法并优选参数以平衡算法性能和复杂度是下一步研究的重点.另外,下一步可致力于进一步提高含噪信号重构性能,尤其是观测值信噪比在 0dB 以下的含噪信号 RSNR.

## 参考文献

- [1] E J Candès, M B Wakin. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21 - 30.
- [2] D L Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [3] R G Baraniuk. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118 - 121.
- [4] D Wei, O Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 - 2249.
- [5] D Needell, J A Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Communications of the ACM, 2010, 53(12): 93 - 100.
- [6] N Vaswani. Kalman filtered compressed sensing[A]. 15th IEEE International Conference on Image Processing[C]. San Diego, California: IEEE, 2008. 893 - 896.
- [7] W B Tian, G S Rui. Reconstruction method for unknown sparsity noisy signals based on kalman filtering matching pursuit [A]. Proceedings of 2012 IEEE 14th International Conference on Communication Technology (ICCT2012) [C]. Chengdu, China: IEEE, 2012. 1323 - 1327.
- [8] 康健, 芮国胜. 粒子滤波算法的关键技术应用[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(4): 53 - 55.
- [9] 康健, 芮国胜, 于仕财. 融合地理信息的粒子滤波被动跟踪算法[J]. 火力与指挥控制, 2013, 38(7): 8 - 10.
- [10] 康健, 张仲凯, 芮国胜. 基于均值漂移粒子滤波的目标跟踪算法研究[J]. 舰船电子工程, 2009, 29(11): 63 - 65.
- [11] H Huang, A Makur. Backtracking-based matching pursuit method for sparse signal reconstruction[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(7): 391 - 394.
- [12] L Zuo, R Niu, P K Varshney. Conditional posterior Cramér-Rao lower bounds for nonlinear sequential Bayesian estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(1): 1 - 14.
- [13] S S Chen, D L Donoho, M A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33 - 61.
- [14] M Grant, S Boyd, cvx Users' Guide for cvx version 1.2 [OL]. <http://www.stanford.edu/~boyd/cvx>. 2009-01-01.

## 作者简介



**田文飏** 男,1987年9月出生,江西南昌人.海军航空工程学院电子信息工程系讲师,主要研究方向为压缩感知、蒸发波导反演.

E-mail: twbi5si@gmail.com



**康健** 女,1971年12月出生,黑龙江哈尔滨人.海军航空工程学院电子信息工程系副教授、硕士生导师,主要研究方向为信号处理及现代滤波理论.

E-mail: kang88jian@sina.com



**芮国胜** 男,1968年3月出生,山东烟台人.海军航空工程学院电子信息工程系教授、博士生导师,主要研究方向为混沌通信系统及现代滤波理论.

E-mail: ruigs@sina.com

**张洋** 男,1983年3月出生,山东烟台人.海军航空工程学院电子信息工程系讲师,主要研究方向为通信信号处理及现代滤波理论.